

# NELINEÁRNÍ VÝPOČET BETONOVÝCH OSTĚNÍ TUNELŮ

## NON-LINEAR ANALYSIS OF CONCRETE TUNNEL LINERS

ALEŠ ZAPLETAL, JIŘÍ HOŘEJŠÍ

### 1. ÚVOD

V poslední době se v českých tunelářských kruzích setkáváme se snahou navrhovat definitivní ostění tunelů z prostého betonu. Že to možné je, dokazují tunely z prostého betonu vybudované či budované nejenom v okolním světě, ale i u nás. V Praze je takto postaven Letenský tunel (do provozu uveden v roce 1953) a oba tratěvé tunely na linii A metra pod Vltavou, mezi stanicemi Staroměstská a Malostranská (zhotoveny technologií lisovaného betonu a do provozu uvedeny v roce 1978).

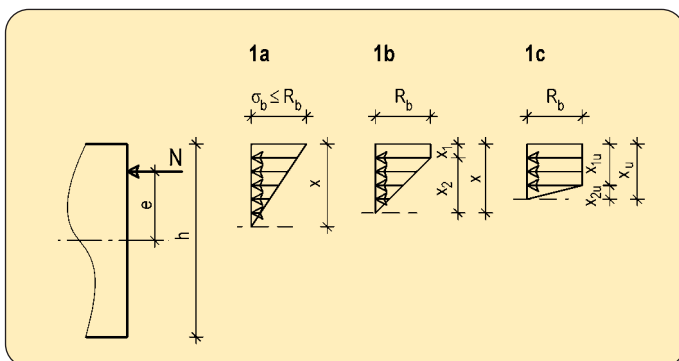
Sama myšlenka tunelu z prostého betonu u nás tedy není nová. Nové je pouze to, že se objevuje ve spojení s Novou rakouskou tunelovací metodou.

Z hlediska statiky novum tohoto typu není významné. Podstatné z hlediska statiky je, že pokud má být ostění z prostého betonu navrženo nejenom bezpečně, ale i hospodárně, nevystačíme většinou s koncepcí lineárního ostění. Musíme přistoupit k výpočtu nelineárnímu, neboli k výpočtu, který respektuje fakt, že se v ostění (po překročení meze trhlín) vytvářejí trhliny a některé průřezy se plastifikují. Trhliny (za předpokladu, že trhlinka není schopna přenést zbytkový tah) způsobí, že výslednice normálových sil ostění zaujmou polohu uvnitř betonového průřezu. To umožňuje odvodit únosnost ostění z výpočtových pevností betonu v tlaku a dosáhnout tak ekonomického návrhu konstrukce. (Poznámka: Pokud leží normálová síla mimo průřez ostění – což může být výsledek lineárního výpočtu – je moment, který síla vyvolává, k zachycení pouze za pomoci tahových napětí betonu, neboť armatura chybí. Tahová pevnost je však řádově menší nežli pevnost tlaková. A to se nutně musí projevit na dimenzích navrhované konstrukce.)

V tomto článku publikujeme fyzikální vztahy, na kterých je možno nelineární výpočet tunelového ostění založit, když toto ostění je modelováno jako prutová soustava.

Nelineární výpočet je zajiště možno uskutečnit i na ostění železobetonovém. Fyzikální vztahy jsou zde komplikovanější a vztahy na prostém betonu jsou pak jejich zvláštním případem. Proto se následující text zabývá prioritně železobetonem, a teprve poté jsou doloženy vztahy odvozené pro prostý beton.

Lineární výpočty nevyžadují kontrolu ve smyslu zajištění náležitosti duktility ostění (ostění nemají příliš vysoké stupně vyztužení). U nelineárních výpočtů je však zapotřebí schopnost průřezů přenést deformace prověřit. To je v našem případě splněno, neboť odvozené vzorce obsahují jako jeden z argumentů poměrné deformace krajních vláken tlaččeného betonu, resp. tažené armatury.



Obr. 1 Vývoj namáhání tlačené oblasti betonového průřezu

Fig. 1 Stress development in the compression zone of concrete section

1a Beton namáhan pružně / 1a Concrete in the elastic state

1b Beton částečně plastifikován / 1b Concrete in the state of partial plasticification

1c Beton ve stavu mezní únosnosti:  $x_{2u} = \epsilon_{pp} / \epsilon_{kp} \cdot x_u$

1c Concrete in the ultimate limit state:  $x_{1c} = \epsilon_{pp} / \epsilon_{kp} \cdot x_u$

### 1. INTRODUCTION

We have been lately able to notice efforts in Czech tunnel construction circles to design final liners of tunnels using unreinforced concrete. The tunnels lined in unreinforced concrete which have been completed not only abroad but also in the Czech Republic are the proof that it is possible. This type of design was used in Prague for the construction of the Letná tunnel (opened to traffic in 1953) and both running tunnels on Line A of the underground railway passing under the Vltava River, between Staroměstská (Old Town) and Malostranská (Lesser Town) stations (which were built using a compressed concrete technique and opened to traffic in 1978).

The idea of using unreinforced concrete for tunnel structures is, therefore, not new in the Czech Republic. The novelty is only the fact that it appears in the combination with the New Austrian Tunnelling Method.

The novelty of this type is insignificant in terms of statics. What is significant in terms of statics is the fact that if the designed unreinforced concrete lining is to be not only save but also economical, than the concept of linear lining is mostly insufficient. We have to approach a non-linear analysis, it means an analysis which respects the fact that cracks occur in the lining (when the limit of cracking has been exceeded) and some sections become plasticized. As a result of the origination of cracks (on the assumption that the crack is not capable of carrying the residual tension), the resultant of normal forces in the lining shifts inside the concrete section. Owing to this fact, the load-bearing capacity of the lining can be deduced from the design values of compressive strengths of concrete, thus an economical design of the structure can be arrived at. (Note: When the normal force lies outside the lining structure cross section, which may be a result of the linear analysis, the moment induced by the force can be carried only by the tensile stresses in concrete because of the fact that concrete reinforcement is missing. However, the tensile strength is lower by order of magnitude than compressive strength. It has definitely to influence dimensions of the structure being designed).

The physical relationships we publish in this paper can be used as a basis of the non-linear structural analysis of the tunnel lining where the lining is modelled as a framework system.

A non-linear analysis can certainly be applied to a reinforced concrete lining. The physical relationships are more complicated in this case, and relationships regarding unreinforced concrete are a special case of these relationships. For that reason, the following text deals with reinforced concrete as a priority, and the relationships deduced for unreinforced concrete are documented subsequently.

Linear analyses do not require checking in the meaning of ensuring proper ductility of the lining (the liners do not have too high percentage of reinforcement). It is, however, necessary for non-linear analyses to check the capability of the sections to carry strain. This requirement is met in our case because the formulas derived contain the strain in edge fibres of a compressed concrete section and strain in tension reinforcement bars as one of the arguments.

### 2. BASIC CONCEPTS

#### 2.1. General description of the stress and strain condition in the section

The non-linear modelling relationships we will derive below will be usable if we are able to express the stress - strain state in the concrete section at any  $M \times N$  ( $M$ =moment,  $N$ =Normal Force) combination falling within or on the  $M - N$  interaction diagram.

## 2. ZÁKLADNÍ POJMY

### 2.1. Obecný popis napjatosti a deformace průřezu

Vztahy nelineárního modelování, které zde odvodíme, budou použitelné, dokážeme-li vyjádřit stav napjatosti a deformace betonového průřezu při jakékoliv kombinaci  $M \times N$  ( $M$  = moment,  $N$  = normálová síla) ležící uvnitř interakčního diagramu, resp. na interakčním diagramu.

Toto vyjádření provedeme za předpokladu, že se průřez deformuje neustále (tedy bez ohledu na trhliny a plastifikaci betonu či oceli) lineárně (rovinně) a že plastifikace průřezu je podřízena (obr. 3) pracovním diagramům betonu či oceli tak, jak je uvádějí normy (ČSN 731201, čl. 2.1.4, čl. 2.2.2.3; ČSN P ENV 1992-1-1, čl. 4.2.1.3.3, čl. 4.2.2.3.2).

Důsledkem je (obr. 1), že plastifikaci průřezu bude odpovídat lichoběžníkové rozdělení napětí po výšce tlačené oblasti a že i plná plastifikace průřezu (dosažení mezního stavu únosnosti) bude v tlačené části betonu popsána lichoběžníkovým rozdělením napětí (nikoliv obdélníkovým). Pro výšky  $x_u, x_{1u}, x_{2u}$  v mezním stavu únosnosti platí (ve všech následujících rovnicích dosazujeme všechny veličiny s kladným znaménkem):

$$x_{2u} = \frac{\varepsilon_{pp} * x_u}{\varepsilon_{kp}} = \frac{R_b * x_u}{E_b * \varepsilon_{kp}} \quad (1)$$

$$x_{1u} = x_u * \left(1 - \frac{R_b}{E_b * \varepsilon_{kp}}\right) \quad (2)$$

V rovnicích je  $R_b$  pevnost betonu v tlaku,  $\varepsilon_{pp} = R_b/E_b$  a  $\varepsilon_{kp}$  je mezní poměrné přetvoření betonu.

Uvažujme o obdélníkovém průřezu z prostého betonu výšky  $h$  a šířky  $b$ . V souřadném systému  $M, N$  sestrojme jeho interakční diagram. Vedme paprsek procházející počátkem, který je množinou možných kombinací  $M \times N$  při téže excentricitě  $e = M/N = konst.$  (obr. 2). Na tomto paprsku existují po překročení meze trhlin dva významné body: bod PP o souřadnicích  $M_{pp}, N_{pp}$ , a bod KP o souřadnicích  $M_{kp}, N_{kp}$ .

Bod PP je bodem počátku plastifikace průřezu. Napětí v tlačené části betonu je po výšce průřezu rozděleno podle trojúhelníka a jeho velikost v krajních vláknech je  $R_b$ . Normálová síla dosahuje velikosti

$$N_{pp} = \frac{3}{2} * R_b * b * \left(\frac{h}{2} - e\right) \quad (3)$$

zatímco deformace krajních vláken je

$$\varepsilon_{pp} = R_b/E_b \quad (4)$$

a výška tlačené oblasti

$$x = 3 * \left(\frac{h}{2} - e\right) \quad (5)$$

Normálová síla  $N < N_{pp}$ , působící na téže excentricitě, vyvolává rovněž trojúhelníkové rozdělení napětí s výškou tlačené oblasti podle rovnice (5), avšak s napětím v krajních tlačných vláknech o velikosti

$$\sigma_b = \frac{2}{3} * \frac{N}{b * \left(\frac{h}{2} - e\right)} \quad (6)$$

a poměrnou deformací krajních vláken

$$\varepsilon = \sigma_b/E_b \quad (7)$$

Síla  $N \in (N_{pp}, N_{kp})$  způsobuje plastifikaci tlačného betonu, která vede na lichoběžníkové rozdělení napětí podle obr. 1.

Platí

$$x_2 = \left(\frac{24N}{R_b * b} * \left(\frac{h}{2} - e\right) - 12 \frac{N^2}{R_b^2 * b^2}\right)^{1/2} \quad (8)$$

$$x_1 = \frac{N}{R_b * b} - \frac{x_2}{2} \quad (9)$$

Součet  $x_1 + x_2$  je vždy menší než  $x$  z rovnice (5).

Pro poměrnou deformaci krajních vláken obdržíme:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{pp} * \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{R_b}{E_b} * \frac{x_1 + x_2}{x_2} \quad (10)$$

V bodě KP je průřez plně plastifikován při normálové síle

$$N_{kp} = \frac{3 * (2 - \xi)^2}{4 * (\xi^2 - 3\xi + 3)} * (h - 2e) * R_b * b = \Xi * (h - 2e) * R_b * b \quad (11)$$

když

This formulation is based on the assumption that the deformation of the section proceeds (irrespective of cracks and plastification of concrete or steel) linearly (i.e. in a planar manner) and that the plastification of the section corresponds (see Fig. 3) to the stress-strain diagrams of concrete or steel in a way which is described in standards (ČSN 731201, čl.2.1.4, čl.2.2.2.3; ČSN P ENV 1992-1-1, čl.4.2.1.3.3, čl.4.2.2.3.2).

Consequently (see Fig. 1), trapezoidal stress distribution through the depth of the compression zone will correspond to the plastification of the section, and the full plastification of the section (the reaching of the ultimate limit state) will also be described by the trapezoidal distribution (not rectangular). It can be stated about the  $x_u, x_{1u}, x_{2u}$  depths in the ultimate limit state (all quantities inserted in all of the equations below have a positive sign) that:

$$x_{2u} = \frac{\varepsilon_{pp} * x_u}{\varepsilon_{kp}} = \frac{R_b * x_u}{E_b * \varepsilon_{kp}} \quad (1)$$

$$x_{1u} = x_u * \left(1 - \frac{R_b}{E_b * \varepsilon_{kp}}\right) \quad (2)$$

In the equations,  $R_b$  is the compressive strength of concrete,  $\varepsilon_{pp} = R_b/E_b$  and  $\varepsilon_{kp}$  is the limit strain in concrete.

Let us assume a rectangular unreinforced concrete section with depth  $h$  and width  $b$ . Let us construct an interaction diagram of the section in an  $M, N$  coordinate system. Let us assume a line passing through the origin, which is a  $M \times N$  combination set with the same eccentricity  $e = M/N = const.$  (see Fig. 2). There are two significant points on this line after the limit state of cracking is exceeded: the PP point with the  $M_{pp}, N_{pp}$  coordinates, and KP point with  $M_{kp}, N_{kp}$  coordinates.

The PP point denotes the starting point of the section plastification. The stress distribution in the compression zone is developed in the triangular shape through the depth of section; the stress value in the outermost fibres is  $R_b$ . The normal force reaches the value of

$$N_{pp} = \frac{3}{2} * R_b * b * \left(\frac{h}{2} - e\right) \quad (3)$$

$$\varepsilon_{pp} = R_b/E_b \quad (4)$$

and the depth of the compression zone

$$x = 3 * \left(\frac{h}{2} - e\right) \quad (5)$$

The normal force  $N < N_{pp}$  acting on the same eccentricity also results in triangular stress distribution with the compression zone depth according to the equation (5), but with the stress value in the outermost fibres under compression

$$\sigma_b = \frac{2}{3} * \frac{N}{b * \left(\frac{h}{2} - e\right)} \quad (6)$$

and the strain in outermost fibres

$$\varepsilon = \sigma_b/E_b \quad (7)$$

The force  $N \in (N_{pp}, N_{kp})$  causes plastification in the concrete compression zone, which results in the trapezoidal stress distribution according to Fig. 1.

It can be stated that

$$x_2 = \left(\frac{24N}{R_b * b} * \left(\frac{h}{2} - e\right) - 12 \frac{N^2}{R_b^2 * b^2}\right)^{1/2} \quad (8)$$

$$x_1 = \frac{N}{R_b * b} - \frac{x_2}{2} \quad (9)$$

The sum  $x_1 + x_2$  is always smaller than the  $x$  from the equation (5).

For the strain in outermost fibres, we obtain:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{pp} * \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{R_b}{E_b} * \frac{x_1 + x_2}{x_2} \quad (10)$$

In the KP point, the section is fully plasticized at the normal force

$$N_{kp} = \frac{3 * (2 - \xi)^2}{4 * (\xi^2 - 3\xi + 3)} * (h - 2e) * R_b * b = \Xi * (h - 2e) * R_b * b \quad (11)$$

where

$$\xi = \frac{\varepsilon_{pp}}{\varepsilon_{kp}} = \frac{R_b}{E_b * \varepsilon_{kp}} \quad \text{and} \quad \Xi = \frac{3 * (2 - \xi)^2}{4 * (\xi^2 - 3\xi + 3)} \quad (12)$$

The quantities  $x_{1u}, x_{2u}$  are calculated from the equations (8) and (9), where we insert  $N = N_{kp}$ .

$$\xi = \frac{\epsilon_{pp}}{\epsilon_{kp}} = \frac{R_b}{E_b \cdot \epsilon_{kp}} \quad \text{a} \quad \Xi = \frac{3 \cdot (2 - \xi)^2}{4 \cdot (\xi^2 - 3\xi + 3)} \quad (12)$$

Veličiny  $x_{1u}, x_{2u}$  vypočteme z rovnic (8), (9), kam dosadíme za  $N = N_{kp}$ . Předchozí rovnice popisují prasklý obdélníkový průřez z prostého betonu ve stavu, kdy se tlacený beton chová pružně, popř. když je částečně plastifikován, popř. když je zcela plastifikován. Průřez je takto popsán ve všech aspektech, které bude vyžadovat formulace nelineárních vztahů pro ostění z prostého betonu.

Obdobné vztahy je nutno odvodit i pro železobeton, pokud by byl materiálem ostění. My se tím zabývat nebudeme, protože to leží mimo záměr tohoto článku a návod jak postupovat jsme poskytli.

### 2.2. Náhradní výška tažené armatury $x_a$

Budeme používat pojem „náhradní výška tažené armatury  $x_a$ “. Výška  $x_a$  je dána vztahem  $x_a = \lambda \cdot f_a / b$ , kde  $f_a / b$  je výška pásu oceli, který vznikne rovnoměrným „rozmazáním“ armatury s plochou  $f_a$  po šířce průřezu (obdélníkového) na úrovni těžiště armatury. Součinitel  $\lambda$  převádí ocel na beton a zohledňuje míru plastifikace průřezu.

Výraz pro  $x_a$  získáme z rovnice (21), kterou nyní odvodíme: Předpokládáme, že normálová síla  $N$ , působící na excentricitě  $e$ , vyvolává v obdélníkovém železobetonovém průřezu stav napětí a deformace podle obr. 3. Platí:

$$N = \sigma_b \cdot b \cdot x_1 + \frac{1}{2} \sigma_b \cdot b \cdot x_2 - \sigma_a \cdot f_a \quad (13)$$

$$\epsilon_a = \epsilon_{pp} \frac{h_0 - x}{x_2} \quad (14)$$

Rovnici (13) upravíme tím, že nejprve vytkneme před závorku  $\sigma_b \cdot b$  a poté v závorce zavedeme substituci  $\sigma_b = \sigma_b^* \cdot \frac{x_2}{h_0 - x}$ , kde  $\sigma_b^*$  je fiktivní napětí v betonu na úrovni armatury, definované předchozí substitucí:

$$N = \sigma_b \cdot b \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{\sigma_a \cdot f_a}{\sigma_b \cdot b}\right) = \sigma_b^* \cdot b \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{\sigma_a \cdot f_a}{\sigma_b^* \cdot b} \cdot \frac{h_0 - x}{x_2}\right) = \sigma_b^* \cdot b \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} - \lambda \cdot \frac{h_0 - x}{x_2} \cdot \frac{f_a}{b}\right) \quad (15)$$

Rovnici (15), kde  $\lambda = \sigma_a / \sigma_b^*$ , dále upravíme:

$$\frac{N \cdot x_2}{\sigma_b^* \cdot b} = x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} - \lambda \cdot (h_0 - x) \cdot \frac{f_a}{b} \quad (16)$$

Statický moment plochy tlacného betonu výšky  $x_1$  a jednotkové šířky  $b=l$  k neutrálné ose je

$$S_{x_1+x_2}^{x_1} = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \quad (17)$$

zatímco statický moment betonu výšky  $x_1$  a jednotkové šířky  $b=l$  k ose vzdálené od tlacného okraje o  $x_1$  je

$$S_{x_1}^{x_1} = \frac{x_1^2}{2} \quad (18)$$

takže

$$x_1 x_2 = S_{x_1+x_2}^{x_1} - S_{x_1}^{x_1} \quad (19)$$

Protože dále

$$S_{x_1+x_2}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} \quad (20)$$

je statický moment tlacného betonu výšky  $x_2$  a jednotkové šířky  $b = l$  k neutrálné ose, můžeme rovnici (16) psát ve tvaru

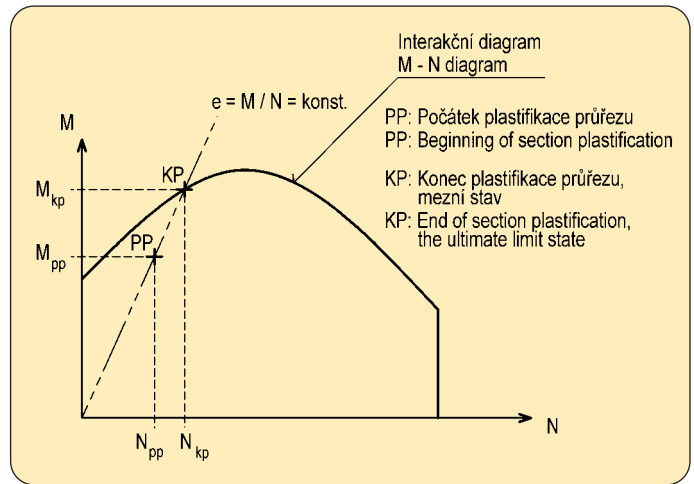
$$\frac{N \cdot x_2}{\sigma_b^* \cdot b} + S_{x_1}^{x_1} = S_{x_1+x_2}^{x_1} + S_{x_1+x_2}^{x_2} - (h_0 - x) \cdot \lambda \cdot \frac{f_a}{b} = S_{x_1+x_2}^{x_1+x_2} - (h_0 - x) \cdot \lambda \cdot \frac{f_a}{b} = S_r \quad (21)$$

kde  $(h_0 - x) \cdot \lambda \cdot \frac{f_a}{b}$  je statický moment jednotkové šířky náhradní plochy armatury  $\lambda \cdot f_a$  o náhradní výšce

$$x_a = \lambda \cdot \frac{f_a}{b} = \frac{\sigma_a \cdot f_a}{\sigma_b^* \cdot b} \quad (22)$$

k neutrálné ose.  $S_{x_1+x_2}^{x_1+x_2}$  je statický moment celé plochy tlacného betonu k neutrálné ose a  $S_r$  je statický moment veškeré účinné plochy o jednotkové šířce  $b=l$  k téže ose.

Koeficient  $\lambda$  nabývá různých hodnot podle toho, v jakém stavu plastifikace se nalézá průřez. Vzorce pro jeho výpočet spolu se vzorci pro  $x_a$  nalezneme v tabulce 1, kde  $E_a$  je modul pružnosti oceli a  $R_a$  je pevnost oceli.



Obr. 2 Postupná plastifikace betonového průřezu  
Fig. 2 Gradual plastification of the concrete section

The above equations describe a cracked rectangular unreinforced concrete section in the condition of elastic behaviour of the concrete compression zone, possibly of its partial or full plastification. Thus, the concrete section is described in all aspects needed for formulation of non-linear relationships for unreinforced concrete lining.

It is necessary to derive similar relationships for reinforced concrete if this material is used for the lining. We are not going to deal with this case because it is beyond the scope of this paper and we have provided guidance as to how to proceed.

### 2.2. The transformed depth of tension reinforcement $x_a$

We will use the term "a transformed depth of tension reinforcement  $x_a$ ". The depth  $x_a$  is given by the relationship  $x_a = \lambda \cdot f_a / b$ , where  $f_a / b$  is the depth of a steel band which originates by spreading of the steel reinforcement area  $f_a$  uniformly throughout the width of the (rectangular) cross section, at the centre of reinforcement level. The coefficient  $\lambda$  converts steel to concrete, taking into account the stage of the section plastification.

We will obtain the expression for  $x_a$  from the equation (21), which is derived as follows:

Let us assume that the normal force  $N$ , acting on an eccentricity  $e$  induces a state of stress and strain in the rectangular reinforced concrete cross section according to Fig. 3.

It can be stated that:

$$N = \sigma_b \cdot b \cdot x_1 + \frac{1}{2} \sigma_b \cdot b \cdot x_2 - \sigma_a \cdot f_a \quad (13)$$

$$\epsilon_a = \epsilon_{pp} \frac{h_0 - x}{x_2} \quad (14)$$

We will rearrange the equation (13); first we factor  $\sigma_b \cdot b$  out and then we use substitution  $\sigma_b = \sigma_b^* \cdot \frac{x_2}{h_0 - x}$  in the brackets, where  $\sigma_b^*$  is the fictitious stress in the concrete at the reinforcement level as defined by the above substitution:

$$N = \sigma_b \cdot b \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{\sigma_a \cdot f_a}{\sigma_b \cdot b}\right) = \sigma_b^* \cdot b \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{\sigma_a \cdot f_a}{\sigma_b^* \cdot b} \cdot \frac{h_0 - x}{x_2}\right) = \sigma_b^* \cdot b \cdot \left(x_1 + \frac{x_2}{2} - \lambda \cdot \frac{h_0 - x}{x_2} \cdot \frac{f_a}{b}\right) \quad (15)$$

The equation (15), where  $\lambda = \sigma_a / \sigma_b^*$ , will be further rearranged:

$$\frac{N \cdot x_2}{\sigma_b^* \cdot b} = x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} - \lambda \cdot (h_0 - x) \cdot \frac{f_a}{b} \quad (16)$$

The static moment of the part of compression zone area of depth  $x_1$  and unit width  $b=l$ , to the zero line is

$$S_{x_1+x_2}^{x_1} = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \quad (17)$$

while the static moment of the part of compression zone area of depth  $x_1$  and unit width  $b=l$ , to the axis at  $x_1$  distance from the outermost fibres under compression is

### 2.3. Zaměnitelnost konstrukcí

#### 2.3.1. Zaměnitelnost prutových rovinných konstrukcí

Dvě rovinné prutové konstrukce s totožnou geometrií střednice a stejného uložení (dále konstrukce) nazveme zaměnitelnými, vyvolává-li v nich stejné zatížení stejná přetvoření  $w = \{w_x, w_y\}$  a stejné vnitřní síly  $M, N, Q$  (= moment, normálová síla, posouvající síla).

#### 2.3.2. Zaměnitelnost lineárních konstrukcí

Dvě lineárně pružné konstrukce (jedna s indexací  $m$ , druhá s indexací  $s$ ) jsou zaměnitelné tehdy, platí-li ve stejných místech střednic konstrukcí:

$$E_m I_m = E_s I_s, \quad (23a)$$

$$E_m F_m = E_s F_s. \quad (23b)$$

$E$  je modul pružnosti,  $I$  moment setrvačnosti průřezu a  $F$  plocha průřezu. Jsou-li dvě lineárně pružné konstrukce zaměnitelné, pak ve stejných místech jejich střednic platí ( $M = M_m = M_s$  a  $N = N_m = N_s$ ):

- pro křivosti  $\rho_m$  a  $\rho_s$

$$\rho_m = 1/r_m = M/(E_m I_m) = M/(E_s I_s) = 1/r_s = \rho_s \quad (24)$$

- pro střední poměrné přetvoření, definované jako  $\varepsilon_{sif} = (\int_f \varepsilon dF) / F$

$$(\varepsilon_{sif})_m = (\int_f \varepsilon_m dF_m) / F_m = N / (E_m F_m) = N / (E_s F_s) = (\int_f \varepsilon_s dF_s) / F_s = (\varepsilon_{sif})_s \quad (25)$$

KOEFCIENT $\lambda$ COEFFICIENT $\lambda$ NÁHRADNÍ VÝŠKA TAŽENÉ ARMATURY $x_a$ TRANSFORMED DEPTH OF TENSION REINFORCEMENT $x_a$		
BETON CONCRETE		
VE STAVU PRUŽNÉM IN ELASTIC STATE		
VE STAVU PLASTICKÉM IN PLASTIC STATE		
OCEL STEEL REINFORCEMENT	VE STAVU PRUŽNÉM IN ELASTIC STATE	$\lambda = \frac{E_a}{E_b}$
		$x_a = \frac{E_a}{E_b} * \frac{f_a}{b}$
	VE STAVU PLASTICKÉM IN PLASTIC STATE	$\lambda = \frac{R_a}{\sigma_b} * \frac{x}{h_0 - x}$ $\sigma_b \in (0, R_b); x_2 = x$
		$x_a = \frac{R_a}{\sigma_b} * \frac{x}{h_0 - x} * \frac{f_a}{b}$
		VE STAVU PRUŽNÉM IN ELASTIC STATE
		VE STAVU PLASTICKÉM IN PLASTIC STATE
		$\lambda = \frac{E_a}{E_b}$
		$x_a = \frac{E_a}{E_b} * \frac{f_a}{b}$
		$\lambda = \frac{R_a}{R_b} * \frac{x_2}{h_0 - x}$
		$x_a = \frac{R_a}{R_b} * \frac{x_2}{h_0 - x} * \frac{f_a}{b}$

Tabulka 1 / Table 1

#### 2.3.3. Zaměnitelnost lineární a nelineární konstrukce

Nelineární konstrukcí je nadále míněna betonová konstrukce, na které je v některých průřezích překročena mez trhlin a která se nalézá v libovolném stupni plastifikace, takže její průřezy mohou být ve stavu pružném, popř. částečně plastifikovaném, popř. mezním.

Lineární konstrukci (s indexací  $m$ ) pokládáme za zaměnitelnou s nelineární konstrukcí (s indexací  $s$ ), když pro  $M = M_m = M_s$  a  $N = N_m = N_s$  ve stejných bodech střednic těchto konstrukcí platí:

$$\rho_m = 1/r_m = M/(E_m I_m) = 1/r_s = \rho_s, \quad \rho_s \neq M/(E_s I_s) \quad (26)$$

$$(\varepsilon_{sif})_m = N/(E_m F_m) = (\varepsilon_{sif})_s, \quad (\varepsilon_{sif})_s \neq N/(E_s F_s) \quad (27)$$

Nelineární konstrukci dokážeme zaměnit konstrukcí lineární, dokážeme-li nahradit prasklý, libovolně plastifikovaný průřez průřezem pružným a neporušeným, takovým, aby platily vztahy (26) a (27).

### 3. VZTAHY ZAMĚNITELNOSTI PRŮŘEZŮ PRO ŽELEZOBETON

Neporušený lineárně pružný obdélníkový průřez  $b \times h_m$  budeme nazývat zaměnitelným s prasklým, libovolně zplastifikovaným, jednostranně vyztuženým železobetonovým obdélníkovým průřezem  $b \times h_s$ , bude-li při zatížení průřezů stejnou kombinací vnitřních sil  $M = M_m = M_s$  a  $N = N_m = N_s$  platit:

$$St_{x1}^{n1} = \frac{x_1^2}{2}, \quad (18)$$

therefore

$$x_1 x_2 = St_{x1+x2}^{n1} - St_{x1}^{n1}. \quad (19)$$

Because, further,

$$St_{x1+x2}^{n2} = \frac{x_2^2}{2} \quad (20)$$

is the static moment of the part of compression zone area of depth  $x_2$  and unit width  $b=1$ , to the zero line, we can write an equation (16) in the form

$$\frac{N * x_2}{\alpha_s * b} + St_{x1}^{n1} = St_{x1+x2}^{n1} + St_{x1+x2}^{n2} - (h_0 - x) * \lambda * \frac{f_a}{b} = St_{x1+x2}^{n1} - (h_0 - x) * \lambda * \frac{f_a}{b} = St \quad (21)$$

where  $(h_0 - x) * \lambda * \frac{f_a}{b}$  is the static moment of the transformed reinforcement area  $\lambda * f_a$  of the unit width and the transformed depth

$$x_a = \lambda * \frac{f_a}{b} = \frac{\sigma_s}{\sigma_b} * \frac{f_a}{b} \quad (22)$$

to the zero line.  $St_{x1+x2}^{n1}$  is the static moment of the entire compression zone area to the zero line, and  $St$  is the static moment of the entire effective area with the unit width  $b=1$  to the same axis.

The coefficient  $\lambda$  assumes various values, depending on the current plastification state of the section. The formulas for calculation of  $\lambda$  and  $x_a$  are available in Table 3, where  $E_a$  is the elastic modulus of steel reinforcement, and  $R_a$  is the steel reinforcement strength.

### 2.3. Interchangeability of the structures

#### 2.3.1. Interchangeability of plane beam structures

Two plane beam structures with the identical centre line geometry and identical supporting system (hereinafter referred to as the structure) is termed interchangeable if identical loading induces identical strain  $w = \{w_x, w_y\}$  and identical internal forces  $M, N, Q$  (= a moment, normal force, shear force) in the structures.

#### 2.3.2. Interchangeability of linear structures

Two linearly elastic structures (one with indexation  $m$ , the other with indexation  $s$ ) are interchangeable if the following equations are true in the corresponding points of the central lines of the structures:

$$E_m I_m = E_s I_s, \quad (23a)$$

$$E_m F_m = E_s F_s. \quad (23b)$$

In the equations  $E$  is the elastic modulus,  $I$  is the moment of inertia and  $F$  is the area of the section.

If two linearly elastic structures are interchangeable, it can be stated, in two corresponding points of the centre lines, that ( $M = M_m = M_s$  and  $N = N_m = N_s$ ):

- for curvatures  $\rho_m$  and  $\rho_s$

$$\rho_m = 1/r_m = M/(E_m I_m) = M/(E_s I_s) = 1/r_s = \rho_s \quad (24)$$

- for a mean strain, which is defined as  $\varepsilon_{sif} = (\int_f \varepsilon dF) / F$

$$(\varepsilon_{sif})_m = (\int_f \varepsilon_m dF_m) / F_m = N / (E_m F_m) = N / (E_s F_s) = (\int_f \varepsilon_s dF_s) / F_s = (\varepsilon_{sif})_s \quad (25)$$

#### 2.3.3. Interchangeability of a linear and non-linear structure

The term "non-linear structure" further means a concrete structure where the limit of cracking has been exceeded in some sections and which is in any stage of plastification, i.e. the sections can be in the elastic state, or partly plasticized state, or in the ultimate limit state.

We will consider a linear structure (with an indexation  $m$ ) interchangeable with a non-linear structure (with an indexation  $s$ ), if it is true for  $M = M_m = M_s$  and  $N = N_m = N_s$  in corresponding points of the centre lines of the structures that:

$$\rho_m = 1/r_m = M/(E_m I_m) = 1/r_s = \rho_s, \quad \rho_s \neq M/(E_s I_s) \quad (26)$$

$$(\varepsilon_{sif})_m = N/(E_m F_m) = (\varepsilon_{sif})_s, \quad (\varepsilon_{sif})_s \neq N/(E_s F_s) \quad (27)$$

We can substitute a non-linear structure for a linear structure if we are able to substitute an elastic and undisturbed cross

$$\rho_m = \rho_s, \quad (28a)$$

$$(\varepsilon_{stř})_m = (\varepsilon_{stř})_s. \quad (28b)$$

Na neporušeném průřezu je

$$\rho_m = M/(E_m I_m), \quad (29)$$

$$(\varepsilon_{stř})_m = N/(E_m F_m). \quad (30)$$

Na prasklém průřezu obdržíme (obr. 4):

• pro křivost:  $\rho_s = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / h_o,$  (31)

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b * (h_o - x) / x, \quad (32)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_a * x / (h_o - x), \quad (33)$$

takže

$$\rho_s = \varepsilon_b / x = \varepsilon_a / (h_o - x). \quad (34)$$

• pro střední poměrnou deformaci:

$$(\varepsilon_{stř})_s = (\varepsilon_b * x/2 - \varepsilon_a * x_a) / (x + x_a) =$$

$$= \varepsilon_a * (x^2 - 2x_a(h_o - x)) / (2(h_o - x)(x + x_a)) =$$

$$= \varepsilon_b * (x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x) / (2x(x + x_a)). \quad (35)$$

Do rovnice (26) dosadíme z rovnice (34) a upravíme, přičemž  $I_m = b * (h_m)^3 / 12$ . Obdržíme buď

$$(h_m)^3 = \frac{12(h_o - x) * M}{E_m * b} * \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{12 * x * M}{E_m * b} * \frac{1}{\varepsilon_b} \quad (36)$$

nebo

$$E_m = \frac{12 * (h_o - x) * M}{b * h_m^3} * \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{12 * x * M}{b * h_m^3} * \frac{1}{\varepsilon_b}. \quad (37)$$

Do rovnice (27) dosadíme z rovnice (35) a upravíme, přičemž  $F_m = b * h_m$ . Pracujeme-li s  $\varepsilon_b$ , obdržíme buď

$$h_m = N * \frac{2x^2 + 2xx_a}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b E_m \varepsilon_b} \quad (38)$$

nebo

$$E_m = N * \frac{2x^2 + 2xx_a}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b h_m \varepsilon_b}. \quad (39)$$

Pracujeme-li s  $\varepsilon_a$ , obdržíme buď

$$h_m = N * \frac{2h_o x + 2h_o x_a - 2x^2 - 2x_a x}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b E_m \varepsilon_a} \quad (40)$$

nebo

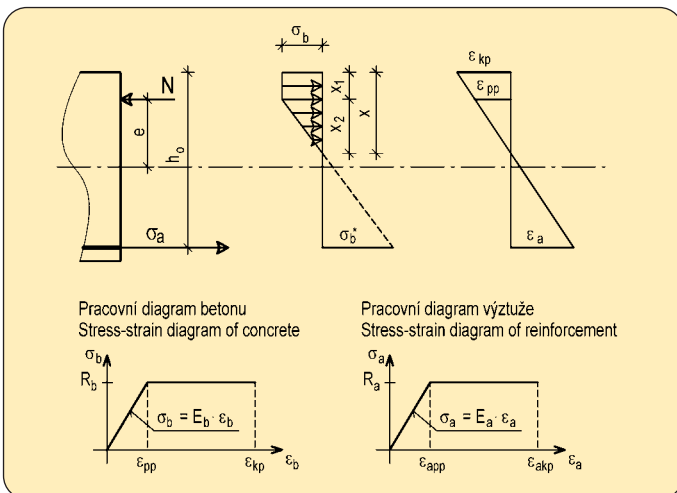
$$E_m = N * \frac{2(h_o x + h_o x_a - x^2 - x_a x)}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b h_m \varepsilon_a}. \quad (41)$$

Do rovnice (36) dosadíme ze (39), upravíme a označíme jako  $e = M/N$  excentricitu normálové síly. Pro výšku neporušeného lineárně pružného průřezu zaměnitelného s průřezem prasklým, libovolně plastifikovaným nalezneme:

$$h_m^2 = 6 * \frac{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x}{x + x_a} * e = 12 * e * \frac{St}{F}, \quad (42)$$

takže

$$h_m = \sqrt{6 * \frac{(x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x) * e}{x + x_a}} = \sqrt{12 * e * \frac{St}{F}}. \quad (43)$$



Obr. 3 Předpoklady o napětí a deformacích v průřezu  
Fig. 3 Assumptions for stress and strain in the section

section for a cracked, arbitrarily plasticized section, so that the relationships (26) and (27) are applicable.

### 3. INTERCHANGEABILITY OF SECTIONS - RELATIONSHIPS APPLICABLE TO REINFORCED CONCRETE

We will term an undisturbed linearly elastic rectangular section  $b \times h_m$  interchangeable with an arbitrarily plasticized, one side reinforced rectangular concrete cross section  $b \times h_s$  if it is possible to state, under the condition of identical internal forces combination (i.e.  $M = M_m = M_s$  a  $N = N_m = N_s$ ), that:

$$\rho_m = \rho_s, \quad (28a)$$

$$(\varepsilon_{stř})_m = (\varepsilon_{stř})_s. \quad (28b)$$

In the case of an undisturbed section:

$$\rho_m = M/(E_m I_m), \quad (29)$$

$$(\varepsilon_{stř})_m = N/(E_m F_m). \quad (30)$$

In the case of a cracked section, we obtain (see Fig.4):

• for a curvature:

$$\rho_s = (\varepsilon_a + \varepsilon_b) / h_o, \quad (31)$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b * (h_o - x) / x, \quad (32)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_a * x / (h_o - x), \quad (33)$$

therefore,

$$\rho_s = \varepsilon_b / x = \varepsilon_a / (h_o - x). \quad (34)$$

• for a mean strain:

$$(\varepsilon_{stř})_s = (\varepsilon_b * x/2 - \varepsilon_a * x_a) / (x + x_a) =$$

$$= \varepsilon_a * (x^2 - 2x_a(h_o - x)) / (2(h_o - x)(x + x_a)) =$$

$$= \varepsilon_b * (x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x) / (2x(x + x_a)). \quad (35)$$

We will insert the expression from the equation (34) into the equation (26) and rearrange it, with  $I_m = b * (h_m)^3 / 12$ . We will obtain either

$$(h_m)^3 = \frac{12(h_o - x) * M}{E_m * b} * \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{12 * x * M}{E_m * b} * \frac{1}{\varepsilon_b} \quad (36)$$

or

$$E_m = \frac{12 * (h_o - x) * M}{b * h_m^3} * \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{12 * x * M}{b * h_m^3} * \frac{1}{\varepsilon_b}. \quad (37)$$

We will insert the expression from the equation (35) into the equation (27) and rearrange it, with  $F_m = b * h_m$ . Operating with  $\varepsilon_b$ , we will get either

$$h_m = N * \frac{2x^2 + 2xx_a}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b E_m \varepsilon_b} \quad (38)$$

or

$$E_m = N * \frac{2x^2 + 2xx_a}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b h_m \varepsilon_b}. \quad (39)$$

Operating with  $\varepsilon_a$ , we will get either

$$h_m = N * \frac{2h_o x + 2h_o x_a - 2x^2 - 2x_a x}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b E_m \varepsilon_a} \quad (40)$$

or

$$E_m = N * \frac{2(h_o x + h_o x_a - x^2 - x_a x)}{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x} * \frac{1}{b h_m \varepsilon_a}. \quad (41)$$

We will insert the expression from the equation (39) into the equation (36) and rearrange it, denoting the eccentricity of the normal force as  $e = M/N$ . For the depth of the undisturbed linearly elastic section interchangeable with a cracked, arbitrarily plasticized section, we will find:

$$h_m^2 = 6 * \frac{x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x}{x + x_a} * e = 12 * e * \frac{St}{F}, \quad (42)$$

therefore,

$$h_m = \sqrt{6 * \frac{(x^2 - 2x_a h_o + 2x_a x) * e}{x + x_a}} = \sqrt{12 * e * \frac{St}{F}}. \quad (43)$$

In the equations (42) and (43),  $F = x + x_a$  is the effective area of a cracked section with unit width  $b=1$  and  $St = x^2/2 - x_a * (h_o - x)$  is the

V rovnicích (42), (43) je  $F = x + x_a$  účinná plocha prasklého průřezu o jednotkové šířce  $b=1$  a  $St = x^2/2 - x_a * (h_0 - x)$  je statický moment účinné plochy o jednotkové šířce  $b=1$  k neutrální ose.

Z rovnice (43) vypočteme  $h_m$  a dosadíme do (39), resp. (41).

Rovnice (39), resp. (41) však ještě neumožňují výpočet modulu pružnosti  $E_m$ , protože obsahují zatím neznámé poměrné přetvoření prasklého průřezu  $\varepsilon_b$ , resp.  $\varepsilon_a$ . Vztahy, platné pro tyto veličiny, odvodíme v následující kapitole.

#### 4. POMĚRNÁ DEFORMACE KRAJNÍCH VLÁKEN BETONU $\varepsilon_b$ A TAŽENÉ VÝZTUŽE $\varepsilon_a$

Podle obr. 3 můžeme po záměně symbolu  $\varepsilon_{kp}$  za symbol  $\varepsilon_b$  odvodit následující obecné formule:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b * x}{E_b * x_2}, \quad (44)$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_b * h_0 - x}{E_b * x_2}, \quad (45)$$

kteří lze konkretizovat pro jednotlivé typy stavu napjatosti průřezu takto:

a) Když  $\sigma_b \leq R_b$  a  $x_1 = 0$ , takže  $x_2 = x$ , je

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_b * h_0 - x}{E_b * x}. \quad (47)$$

b) Když  $\sigma_b = R_b$  a  $x_1 \neq 0$ , je

$$\varepsilon_b = \frac{R_b * x}{E_b * x_2}, \quad (48)$$

$$\varepsilon_a = \frac{R_b * h_0 - x}{E_b * x_2}. \quad (49)$$

Musí být:  $\varepsilon_b \leq \varepsilon_{kp}$  a  $\varepsilon_a \leq \varepsilon_{akp}$ .

Z rovnice (44), resp. (46) nebo (45), resp. (47) dosadíme do rovnice (39) nebo (41). Poté kterákoliv z nich umožňuje výpočet  $E_m$ .

#### 5. VZTAHY ZAMĚNITELNOSTI PRŮŘEZŮ PRO PROSTÝ BETON

Vztahy zaměnitelnosti pro prostý beton získáme, když do vztahů zaměnitelnosti pro železobeton (39) a (43) dosadíme za  $x_a=0$ . Obdržíme:

$$h_m = \sqrt{6 * e * x}, \quad (50)$$

$$E_m = \frac{2N}{\varepsilon_b * b * h_m}. \quad (51)$$

#### 6. ZÁVĚR

Odvodili jsme vztahy zaměnitelnosti mezi průřezem prasklým, libovolně plastifikovaným a neporušeným průřezem pružným.

Tyto vztahy umožňují vytvoření pružného výpočetního modelu ostění, jehož vnitřní síly a deformace od daného zatížení odpovídají vnitřním silám a deformacím stejně zatíženého, popraskaného a libovolně plastifikovaného ostění skutečného. Prut  $i$ , resp.  $j$  výpočetního modelu má výšku  $h_{mi}$ , resp.  $h_{mj}$  a modul pružnosti  $E_{mi}$ , resp.  $E_{mj}$ , přičemž obecně platí  $h_{mi} \neq h_{mj} \neq h$  a  $E_{mi} \neq E_{mj} \neq E_b$ .

Modelové ostění vytvoříme pomocí iteračního procesu. Při něm je vyhledán výpočetní model, jehož vnitřní síly, aplikovány na skutečné ostění, model reprodukuje. Podrobněji řečeno, iterační proces je ukončen poté, co parametry *skutečného ostění* (tedy např.  $x$ ,  $x_a$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$ ), popraskaného a plastifikovaného od účinku *modelových sil*  $M$ ,  $N$ , dosazený do rovnic (43) a (39), resp. (50) a (51) poskytnou tentýž model (stejná  $h_{mi}$  a  $E_{mi}$ ), jako předchozí iterační cyklus.

Považujeme za vhodné doplnit předchozí text několika poznámkami:

##### 6.1. K rovnici (43)

Aby rovnice (43) vracela reálné hodnoty  $h_m$ , musí být výraz  $(x^2 - 2x_a h_0 + 2x_a x) = 2 * St \geq 0$ , takže  $St \geq 0$ . Rovnicí (21) je to zaručeno.

##### 6.2. K rovnicím (43), (39), (41)

6.2.1. Jestliže  $e \rightarrow 0$  (= přechod k centrickému tlaku), pak podle (43)  $h_m \rightarrow 0$  a podle (39) resp. (41)  $E_m \rightarrow \infty$ .

static moment of the effective area of the unit width  $b=1$ , to the zero line.

We will calculate  $h_m$  from the equation (43) and insert it in the equation (39), possibly (41).

However, the equations (39) and (41) do not allow yet the calculation of the elastic modulus  $E_m$  because they include the cracked section strains  $\varepsilon_b$  and  $\varepsilon_a$  which have been still unknown. The relationships valid for these quantities will be derived in the next chapter.

#### 4. STRAIN IN OUTERMOST FIBRES OF CONCRETE $\varepsilon_b$ AND IN TENSION REINFORCEMENT $\varepsilon_a$

According to Fig.3, we can derive the generally valid formulas after replacement of the symbol  $\varepsilon_{kp}$  with symbol  $\varepsilon_b$ , as follows:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b * x}{E_b * x_2}, \quad (44)$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_b * h_0 - x}{E_b * x_2}. \quad (45)$$

The formulas can be individually specified for the particular types of the stress state in the section, as follows:

a) If  $\sigma_b \leq R_b$  and  $x_1 = 0$ , therefore  $x_2 = x$ , then

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b}, \quad (46)$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_b * h_0 - x}{E_b * x}. \quad (47)$$

b) If  $\sigma_b = R_b$  and  $x_1 \neq 0$ , then

$$\varepsilon_b = \frac{R_b * x}{E_b * x_2}, \quad (48)$$

$$\varepsilon_a = \frac{R_b * h_0 - x}{E_b * x_2}. \quad (49)$$

The following relationships have to be true:  $\varepsilon_b \leq \varepsilon_{kp}$  and  $\varepsilon_a \leq \varepsilon_{akp}$ .

We will insert the expressions from the equation (44), possibly (46) or (45), possibly (47) into the equation (39) or (41). Then, any of these equations enables the calculation of  $E_m$  value.

#### 5. SECTION INTERCHANGEABILITY RELATIONSHIPS APPLICABLE TO UNREINFORCED CONCRETE

The interchangeability relationships applicable to unreinforced concrete will be determined by insertion of  $x_a=0$  into the interchangeability relationships (39) and (43), derived for the reinforced concrete. Then, we get:

$$h_m = \sqrt{6 * e * x}, \quad (50)$$

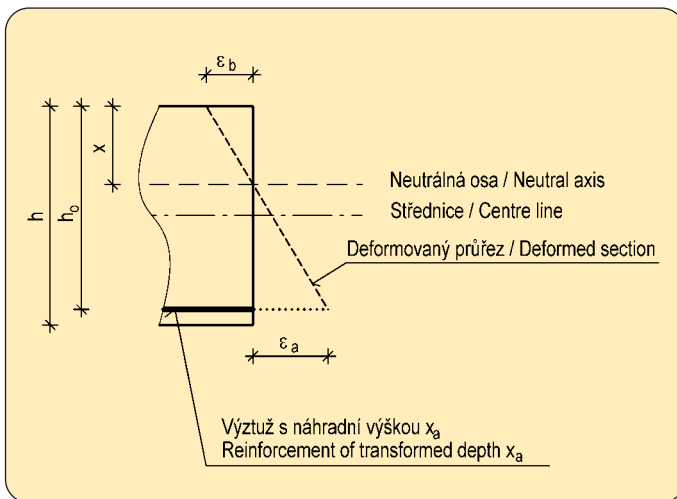
$$E_m = \frac{2N}{\varepsilon_b * b * h_m}. \quad (51)$$

#### 6. CONCLUSION

We have derived relationships of the interchangeability between a cracked, arbitrarily plasticized section and an undisturbed elastic section.

These relationships allow creation of an elastic calculation model of a lining where the internal forces and strain induced by the given loading correspond to the internal forces and strain in a real lining, which is identically loaded, cracked and arbitrarily plasticized. The beams  $i$  and  $j$  of the calculation model have the depths  $h_{mi}$  and  $h_{mj}$  and the elastic moduli  $E_{mi}$  and  $E_{mj}$ , while it is generally true that  $h_{mi} \neq h_{mj} \neq h$  and  $E_{mi} \neq E_{mj} \neq E_b$ .

The lining model will be created by means of the iteration process. During the process, such a calculation model is sought where the internal forces reproduce the model when applied to the real lining. In more detail, the iteration process is stopped when the parameters of the *real lining* (e.g.  $x$ ,  $x_a$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$ ), cracked and plasticized by the effect of the *model forces*  $M$ ,  $N$ , when inserted into the equations (43) and (39), possibly (50) and (51), produce the same



Obr. 4 Vztahy zaměnitelnosti – význam použité symboliky  
Fig. 4 Interchangeability relations – meaning of the used notation

Ve skutečnosti již předtím, nežli  $e = 0$ , stává se celý průřez tláčným, trhliny nemohou vzniknout a rovnice (43), (39), (41) ztrácejí svůj fyzikální smysl.

Ve stavu pružného namáhání je obdélníkový průřez z prostého betonu celý tláčen, když  $e = h/6$ . Pro tyto poměry můžeme odvodit následující vztahy:

$$h_m = h, \quad (52)$$

$$E_m = E_b. \quad (53)$$

Plastifikace betonu posouvá neutrálnou osu z hrany průřezu směrem k jeho těžišti. Ve stavu mezní únosnosti je výška tlačené oblasti

$$x_u = \Xi * (h - 2e) * 2E_b \varepsilon_{kp} / (2E_b \varepsilon_{kp} - R_b). \quad (54)$$

Např. pro beton B30 (zde i dále ignorujeme veškeré součinitele s výjimkou součinitele působení betonu  $\gamma_{bs} = 0,8$ ) dostáváme ( $E_b = 32\,500\text{ MPa}$ )

$$h_m = 0,876h, \quad (55)$$

$$E_m = (2(h - 2e)R_b * b * \Xi) / (\varepsilon_{kp} * b * h_m) = 13676\text{ MPa} = 0,421E_b. \quad (56)$$

6.2.2. Největší přípustná excentricita na obdélníkovém průřezu z prostého betonu je  $e = 0,45h$  (viz ČSN 73 1201, čl.5.2.5.3).

Je-li tlačená část průřezu namáhána pružně, vypočteme nezávisle na třídě betonu:

$$h_m = 0,636h, \quad (57)$$

$$E_m = 0,236E_b, \quad (58)$$

zatímco v mezním stavu únosnosti a pro beton B30 je

$$h_m = 0,558h, \quad (59)$$

$$E_m = 0,099E_b. \quad (60)$$

6.2.3. Jestliže  $e \rightarrow \infty$  (= železobeton, přechod k čistému ohybu), pak  $h_m \rightarrow \infty$  a  $E_m \rightarrow 0 / \infty$ .

Tyto limity se nedají numericky zužitkovat a zaměnitelnost průřezů při čistém ohybu se musí formulovat jinak, pouze pomocí rovnice (26).

Pro nás je důležité, že tunel je konstrukce silně tlačená, nikoliv silně ohýbaná. Proto zaměňujeme skutečné nelineární ostění lineárním ostěním modelovým v těch oblastech interakčního diagramu, které jsou od nebezpečné zóny kolem čistého ohybu dostatečně vzdáleny, takže problémy numerické povahy nám z tohoto titulu nehrozí.

ING. ALEŠ ZAPLETAL, DrSc., zapletal@metrostav.cz,  
METROSTAV a. s.

ING. JIŘÍ HOŘEJŠÍ, jiri.horejsi@ikpce.com,  
IKP CONSULTING ENGINEERS, s. r. o.

model ( $h_{mi}$  and  $E_{mi}$  are identical) as that obtained in the preceding iteration cycle.

We believe that several notes added to the above text will be helpful:

### 6.1. As to the equation (43)

The expression  $(x^2 - 2x_d h_0 + 2x_a x) = 2 * S t \geq 0$ , and therefore  $S t \geq 0$ , has to be fulfilled, so that we can get the real values  $h_m$  from the equation (43). This condition is guaranteed by the equation (21).

### 6.2. As to the equations (43), (39), (41)

6.2.1. If  $e \rightarrow 0$  (= transition to centric compression), then, according to (43),  $h_m \rightarrow 0$  and, according to (39), possibly (41)  $E_m \rightarrow \infty$ .

In fact, the entire section become compressed even before  $e = 0$ , thus the cracking cannot occur, and the equations (43), (39) and (41) lose their physical meaning.

In the elastic state of stress, the entire rectangular unreinforced concrete section is under compression when  $e = h/6$ . We can derive the following relationships for these conditions:

$$h_m = h, \quad (52)$$

$$E_m = E_b. \quad (53)$$

The plastification of concrete moves the zero line from the edge of the section toward its centre. In the ultimate limit state, the depth of the compression zone is

$$x_u = \Xi * (h - 2e) * 2E_b \varepsilon_{kp} / (2E_b \varepsilon_{kp} - R_b). \quad (54)$$

For example, for the concrete class B30 (here and further we ignore all coefficients, excepting the concrete action coefficient  $\gamma_{bs} = 0,8$ ), we obtain ( $E_b = 32\,500\text{ MPa}$ )

$$h_m = 0,876h, \quad (55)$$

$$E_m = (2(h - 2e)R_b * b * \Xi) / (\varepsilon_{kp} * b * h_m) = 13676\text{ MPa} = 0,421E_b. \quad (56)$$

6.2.2. The highest allowable eccentricity in a rectangular unreinforced concrete section is  $e = 0,45h$  (see ČSN 73 1201, paragraph 5.2.5.3).

If the compression zone of the section is in the elastic state, we will calculate independently of the concrete class:

$$h_m = 0,636h, \quad (57)$$

$$E_m = 0,236E_b, \quad (58)$$

while in the ultimate limit state and for concrete class B30

$$h_m = 0,558h, \quad (59)$$

$$E_m = 0,099E_b. \quad (60)$$

6.2.3. If  $e \rightarrow \infty$  (= reinforced concrete, transition to pure bending), then  $h_m \rightarrow \infty$  and  $E_m \rightarrow 0 / \infty$ .

These limits are numerically inexplotable; therefore, the interchangeability of sections at pure bending has to be formulated in another way, using only the equation (26).

Important for us is the fact that a tunnel is a largely compressed, not largely bent structure. For that reason we substitute a real non-linear lining for a model linear lining only in those areas of the  $M-N$  interaction diagram which are at a sufficient distance from the dangerous zone close to the pure bending so that we prevent from problems of a numerical character.

ING. ALEŠ ZAPLETAL, DrSc., zapletal@metrostav.cz,  
METROSTAV a. s.

ING. JIŘÍ HOŘEJŠÍ, jiri.horejsi@ikpce.com,  
IKP CONSULTING ENGINEERS, s. r. o.

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] ČSN 73 1201 Navrhování betonových konstrukcí  
[2] ČSN P ENV 1992-1-1 Navrhování betonových konstrukcí